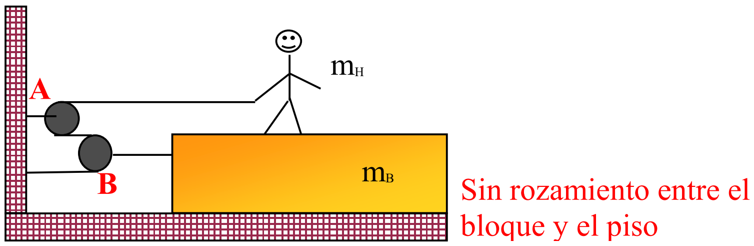
Problema 18

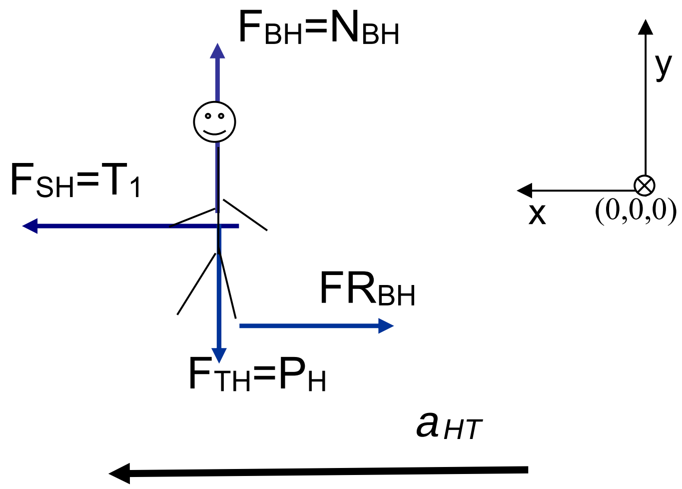
Un hombre está parado sobre un bloque de masa $m_B=3m_H$. Entre el bloque y el hombre hay rozamiento, el coeficiente de fricción es μ. El bloque está sobre un piso horizontal sin rozamiento. El hombre está tomado de una soga ideal y las poleas también son ideales.
a) Realice el DCL para el hombre, el bloque y las poleas para un observador inercial. Indicando las fuerzas exteriores e interiores para el sistema formado sólo por el hombre y el bloque



- **Sistema de referencia fijo a tierra** (observador inercial) son válidas las leyes de Newton
- Sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z)
- DCL:
  - Hombre
  - Bloque
  - Poleas

Utilizando la 2da ley de Newton

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{ext_i} = m\vec{a}}$$



$$\hat{x}: T_1 - FR_{HB} = m_H\, a_H \qquad (1)$$
$$\hat{y}: N_{BH} - P_H = 0 \qquad (2)$$

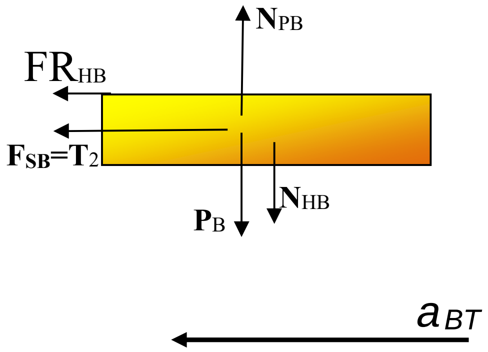
a_{HT} = aceleración del hombre vista desde la Tierra

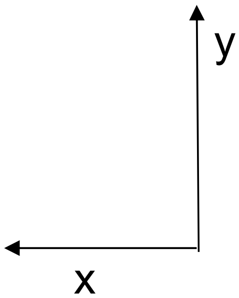
$F_{TH}=P_H$

$F_{BH}=N_{BH}$ fuerza que el bloque le hace al hombre (normal)

$F_{SH}=T_1$ fuerza que la soga le ejerce al hombre

$FR_{BH}=$ fuerza de rozamiento que el bloque le ejerce al hombre





$$\hat{x} : T_2 + FR_{HB} = m_B a_B \quad (3)$$
$$\hat{y} : N_{PB} - N_{HB} - P_B = 0 \quad (4)$$

Las fuerzas de rozamiento entre el hombre y el bloque y viceversa son pares de interacción (3ra ley de Newton)

$FR_{HB} = FR_{BH} = FR$ (renombrándolas como FR)

Las normales sobre el hombre debido al bloque y la del bloque debido al hombre son pares de interacción (3ra ley de Newton)

$N_{BH} = N_{HB} = N$ (renombrándolas como N)

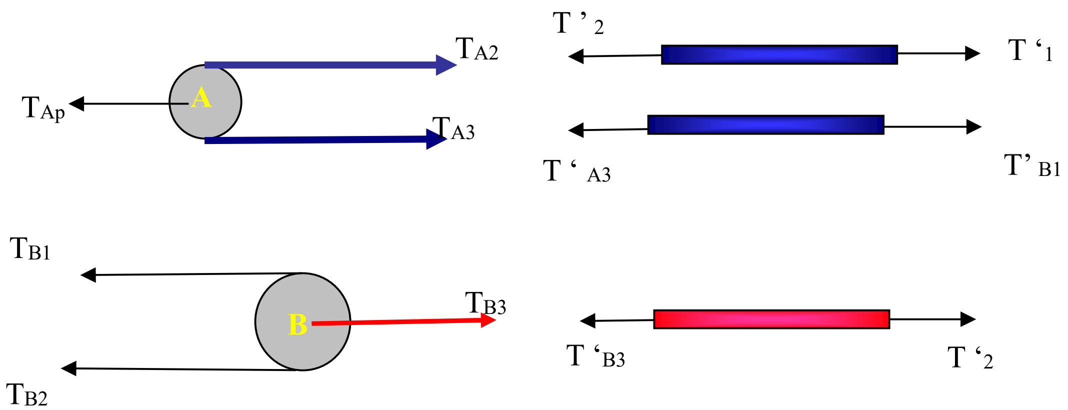
La fuerza de rozamiento entre el hombre y el bloque es estática pues son solidarios, por lo que las aceleraciones son iguales en la componente x, ya que elegimos el mismo sentido de x para ambos cuerpos

$$a_H = a_B \quad (5)$$

Además la fuerza de rozamiento es estática pero no tiene porque ser máxima en principio sino dicen que está a punto de resbalar, justo en el punto b) de este problema se pide calcular la aceleración máxima para que el hombre no deslice.
Entonces la fuerza de rozamiento es estática máxima por lo que vale que

$$FR = \mu_e N \quad (6)$$

DCL para las poleas y sogas (aunque no lo pidan explícitamente necesito hacer el DCL correspondientes a las cuerdas)



Poleas de masa despreciables (lo podremos justificar correctamente cuando veamos cuerpo rígido (lo mismo sucede en el problema 24))

$$T_{A2} = T_{A3} \qquad (7)$$

$$T_{B1} = T_{B2} \qquad (8)$$

Sogas de masa despreciable, utilizando la 2da ley de Newton para cada tramo de las sogas

$$T'_{B3} - T'_2 = m_s a_S = 0 \quad porque \ m_S = 0 \Rightarrow \quad T'_{B3} = T'_2 \qquad (9)$$

$$idem \Rightarrow \ para\ el\ otro\ tramo \qquad T'_{A2} = T'_1 \qquad (10)$$

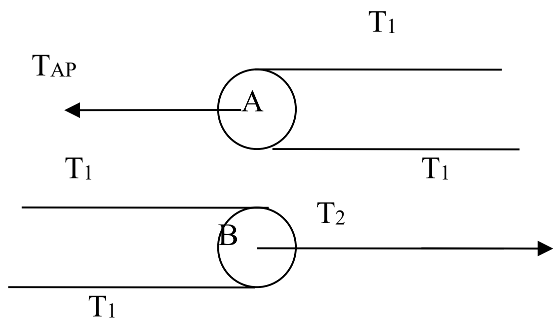
$$idem \Rightarrow \ para\ el\ otro\ tramo \qquad T'_{A3} = T'_{B1} \qquad (11)$$

Usando la 3° ley de Newton (para determinar los pares de interacción)

$$T'_2 \ \ par\ de\ interacción\ de\ T_2 \qquad (12)$$

$$T'_1 \ \ par\ de\ interacción\ de\ T_1 \qquad (13)$$

$$T'_{B3} \ \ par\ de\ interacción\ de\ T_{B3} \qquad (14)$$



$$T'_1 = T_1 = T'_{A2} = T_{A2} = T_{A3} = T_1 \qquad (15)$$

$$T_1 = T_{A3} = T'_{A3} = T'_{B1} = T'_{B2} \qquad (16)$$

$$T'_{B3} = T'_{B3} = T'_2 = T_2 \qquad (17)$$

Utilizando las relaciones de (7) a (17), tenemos:

$$T_1 + T_1 - T_2 = m_p a_p \qquad (17)$$

para la polea B, de masa despreciable

$$T_1 + T_1 - T_2 = 0 \qquad (18)$$

Con estas relaciones entre las tensiones se llega a que:

$$T_2 = 2T_1 \qquad (19)$$

Las relaciones entre las aceleraciones ya las tuvimos en cuenta en la ecuación (5)

Sistema de ecuaciones final

$$\hat{x}: T_1 - FR = m_H a_H \qquad (1)$$

$$\hat{y}: N - P_H = 0 \qquad (2)$$

$$\hat{x}: T_2 + FR = m_B a_B \qquad (3)$$

$$\hat{y}: N_{PB} - N - P_B = 0 \quad (4)$$

$$FR = \mu N \qquad (5)$$

$$a_H = a_B = a_{máx} \qquad (6)$$

$$T_2 = 2T_1 \qquad (7)$$

Recordar que se pide calcular la aceleración máxima para que el hombre no deslice, por lo tanto la fuerza de rozamiento es estática y es máxima.
A la aceleración máxima la llamamos $a_{máx}$

Tenemos entonces el nuestro sistema de ecuaciones, donde en las ecuaciones originales (1) al (4) reemplazamos FR, N y las relaciones entre todas las tensiones de las sogas que pasan por ambas poleas usando (5) y (7).

Incógnitas: T_1, T_2, N, $a_{máx}$, N_{PB}

Podemos llevar el sistema a 4 ecuaciones y 4 incógnitas utilizando (5), (6) y (7) en las 4 primeras ecuaciones, resultando

$$\hat{x}: T_1 - \mu N = m_H a_{máx} \qquad (1)$$

$$\hat{y}: N - m_H g = 0 \qquad (2)$$

$$\hat{x}: 2T_1 + \mu N = m_B a_{máx} \qquad (3)$$

$$\hat{y}: N_{PB} - N - m_B g = 0 \quad (4)$$

El sistema tiene 4 ecuaciones con 4 incógnitas. T_1, N, $a_{máx}$, N_{PB}
Resolviendo y utilizando el dato $m_B = 3m_H$ se llega a que

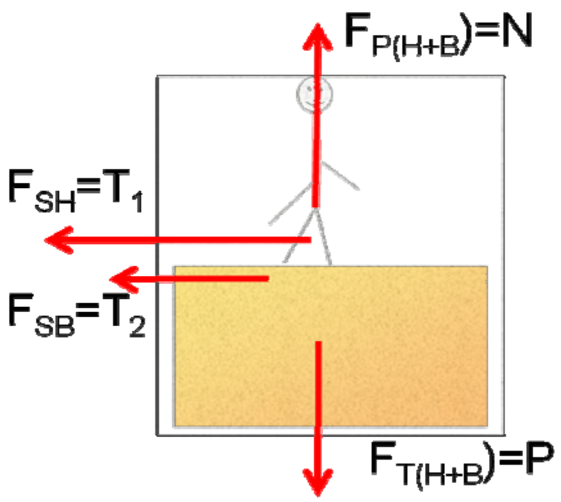
$$a_{máx} = 3\mu g$$

Lo que sigue lo podrán resolver cuando vean Trabajo y energía de todas formas aquí lo dejamos para que lo consulten a su debido tiempo!

En el punto c) se pide que analicen si la energía mecánica del sistema (hombre + bloque) varía mientras el hombre tira de la soga.
Para analizar esto, utilizamos la definición de energía mecánica, la cual relaciona precisamente la variación de energía mecánica con el trabajo de las fuerzas no conservativas del sistema.

$$\Delta E_m = W_{FNC}$$

Veamos cuales son las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema hombre más bloque (tomados como un solo cuerpo puntual), para esto hacemos el DCL del sistema



$d\vec{r}$

$$d\vec{r} = (dx,0,0) = dx\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{z}$$

Fuerzas no conservativas:

- Normal
- Tensiones 1 y 2

Analizamos entonces el trabajo de cada una de estas fuerzas

$$W_N = \int_{ro}^{r} \vec{N}.\, d\vec{r} = 0$$

La fuerza normal es perpendicular al desplazamiento ($d\vec{r}$) (el producto escalar entre ambos vectores es nulo ya que el ángulo entre ellos es de 90º y el coseno de 90º es cero) es decir, ya que la normal tiene componente en $\hat{j}$ y dr tiene componente en $\hat{\imath}$ el producto escalar es nulo.

$$W_{T_1} = \int_{ro}^{r} \vec{T}_1.\, d\vec{r} > 0$$ *la fuerza $\vec{T}_1$ es paralela al desplazamiento $d\vec{r}$*

igual dirección y sentido, es decir, ya que la tensión uno tiene componente en $\hat{\imath}$ y dr también tiene componente en $\hat{\imath}$ el producto escalar es mayor que cero.

$$W_{T_2} = \int_{ro}^{r} \vec{T}_2.\, d\vec{r} > 0$$ *la fuerza $\vec{T}_2$ es paralela al desplazamiento $d\vec{r}$*

igual dirección y sentido es decir, ya que la tensión dos tiene componente en $\hat{\imath}$ y dr también tiene componente en $\hat{\imath}$ el producto escalar es mayor que cero.

Con estos resultados tenemos que

$W_{FNC} > 0$ entonces

$\Delta E_m > 0$ por lo tanto la energía mecánica del sistema hombre más bloque varía

Aclaraciones:

1) Observen que analizamos sin hacer cuentas explícitas pero utilizando las definiciones básicas. Si no, no está justificado!!!!!. No pide calcule sino que ANALICE. El análisis se hace a partir de las leyes!!!!. Las definiciones de trabajo y de energía mecánica están relacionadas, directamente, con las leyes de Newton!!!
2) Todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos que componen este sistema de hombre bloque que son interacciones entre ambos, son las que llamaremos (cuando pasemos a sistemas de partículas) fuerzas internas.